Exercice 1 (4points) :

Soit (u_n) la suite définie par : $u_0 = \frac{3}{2}$ et $u_{n+1} = \frac{2u_n}{2u_n+5}$ pour tout n de $\mathbb{N}$

0,25 1) Calculer u_1

0,5 2) Montrer par récurrence que pour tout n de $\mathbb{N}$, $u_n > 0$

1 3) a) Montrer que pour tout n de $\mathbb{N}$, $0 < u_{n+1} < \frac{2}{5}u_n$

puis en déduire que pour tout n de $\mathbb{N}$, $0 < u_n < \frac{3}{2}\left(\frac{2}{5}\right)^n$

0,5 b) Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$

4) On Considère la suite numérique (v_n) définie par : $v_n = \frac{4u_n}{2u_n+3}$ pour tout n de $\mathbb{N}$

0,75 a) Montrer que (v_n) est une suite géométrique de raison $\frac{2}{5}$

1 b) Déterminer v_n en fonction de n et e déduire u_n en fonction de n pour tout n de $\mathbb{N}$

Exercice 2 (5 points) :

1) Dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexe, on considère l'équation (E): $z^2 - 2(\sqrt{2}+\sqrt{6})z + 16 = 0$

0,5 a) Vérifier que le discriminant de l'équation (E) est $\Delta = -4(\sqrt{6}-\sqrt{2})^2$

1 b) En déduire les solutions de l'équation (E)

2) Soient les nombres complexes $a = (\sqrt{6}+\sqrt{2}) + i(\sqrt{6}-\sqrt{2})$, $b = 1 + i\sqrt{3}$ et $c = \sqrt{2} + i\sqrt{2}$

0,75 a) Vérifier que : $b\bar{c} = a$, puis en déduire que $ac = 4b$

0,5 b) Ecrire les nombres complexes b et c sous forme trigonométrique

0,5 c) En déduire que : $a = 4\left(\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)\right)$

3) Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct $(O\,;\,\vec{u}\,;\,\vec{v})$, on considère les points B , C et D d'affixes respectives b, c et d telle que $d = a^4$. Soit z l'affixe d'un point M du plan et z' l'affixe de M' image de M par la rotation R de centre O t d'angle $\frac{\pi}{12}$

0,5 a) Vérifier que : $z' = \frac{1}{4}az$

0,25 b) Déterminer l'image du point C par la rotation R

0,25 c) Déterminer la nature du triangle OBC

0,75 d) Montrer que : $a^4 = 128b$ et e déduire que es points O , B et D sont alignés

Exercice 3 (4 points) :

On considère la fonction numérique g définie sur $]0,+\infty[$ par : $g(x) = 2\sqrt{x} - 2 - \ln(x)$

0,5 1) a) Montrer que pour tout x de $]0,+\infty[$, $g'(x) = \frac{\sqrt{x}-1}{x}$

0,5 b) Montrer que g est croissante sur $]0,+\infty[$

0,5 c) En déduire que pour tout x de $[1,+\infty[$, $0 \leq \ln(x) \leq 2\sqrt{x}$ (remarquer que $2\sqrt{x} - 2 \leq 2\sqrt{x}$)

1 d) Montrer que pour tout x de $[1,+\infty[$, $0 \leq \frac{(\ln(x))^3}{x^2} \leq \frac{8}{\sqrt{x}}$ et en déduire $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{(\ln(x))^3}{x^2}$

0,75 2) a) Montrer que la fonction : $G: x \mapsto x\left(-1 + \frac{4}{3}\sqrt{x} - \ln(x)\right)$ est une primitive de g sur $]0,+\infty[$

0,75 b) Calculer l'intégrale : $\int_1^4 g(x)dx$

Problème (7 points) :

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = -x + \frac{5}{2} - \frac{1}{2}e^{x-2}(e^{x-2} - 4)$

Et (C_f) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O; \vec{\imath}; \vec{\jmath}\,)$ (unité : 2cm)

0,5 1) Montrer que $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$

0,5 2) a) Démontrer que la droite (Δ) d'équation $y = -x + \frac{5}{2}$ est une asymptote à la courbe (C_f) au voisinage de $-\infty$

0,75 b) Résoudre l'équation $e^{x-2} - 4 = 0$ puis montrer que la courbe (C_f) est au-dessus de (Δ) sur l'intervalle $]-\infty, 2+\ln(4)]$ et en dessous de (Δ) sur l'intervalle $[2+\ln(4), +\infty[$

0,5 3) Montrer que : $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = -\infty$ puis interpréter géométriquement le résultat

0,5 4) a) Montrer que pour tout x de $\mathbb{R}$, $f'(x) = -(e^{x-2} - 1)^2$

0,25 b) Dresser le tableau de variations de la fonction f

0,75 5) Calculer $f''(x)$ pour tout x de $\mathbb{R}$ puis montrer que A(2 , 2) est un point d'inflexion de (C_f)

0,5 6) Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique α telle que : $2 + \ln(3) < \alpha < 2 + \ln(4)$

1 7) Construire (Δ) et (C_f) dans le repère $(O\,; \vec{\imath}\,; \vec{\jmath})$ ci-dessous (on prend $\ln(2) \approx 0,7$ *et* $\ln(3) \approx 1,1$)

0,5 8) a) Montrer que la fonction f admet une fonction réciproque f^{-1} définie sur $\mathbb{R}$

0,75 b) Construire dans le même repère $(O\,; \vec{\imath}\,; \vec{\jmath})$ la courbe représentative de la fonction f^{-1} (remarque que la droite (Δ) est perpendiculaire à la première bissectrice du repère)

0,5 c) Calculer $(f^{-1})'(2 - \ln(3))$ (remarquer que $f^{-1}(2 - \ln 3) = 2 + \ln 3$)